Angle inscrit dans un cercle

I) Définition :

1) Angle inscrit dans un cercle (figures 1 et 2)

On dit que $\widehat{AMB}$ est un ***angle inscrit dans le cercle*** si les côtés de l'angle [MA] et [MB] sont deux cordes de ce cercle.

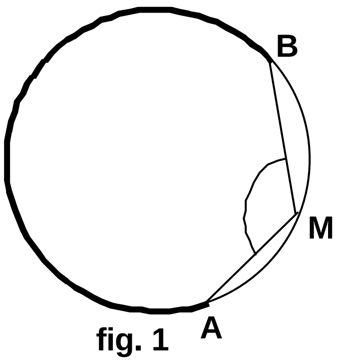


fig. 1

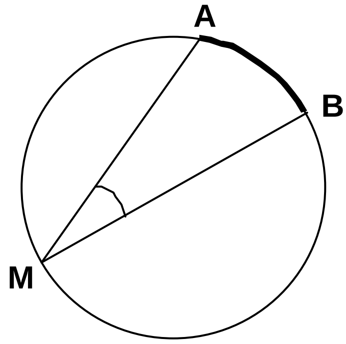


fig. 2

On dit que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ ***intercepte*** l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (représenté en gras sur le dessin).

2) Angle au centre associé à un angle inscrit (figures 3 et 4)

O étant le centre du cercle, on dit que $\widehat{AOB}$ est ***l'angle au centre associé*** à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ car il intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Remarque : Dans la figure 4, $\widehat{AOB}$ devrait logiquement s'écrire $\overset{\smile}{AOB}$ car il est supérieur à 180°.

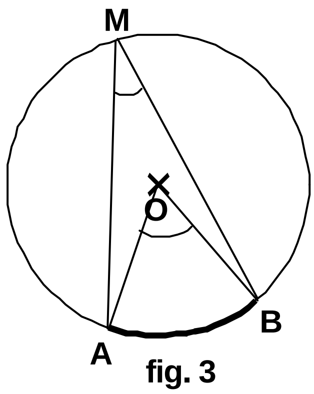


fig. 3

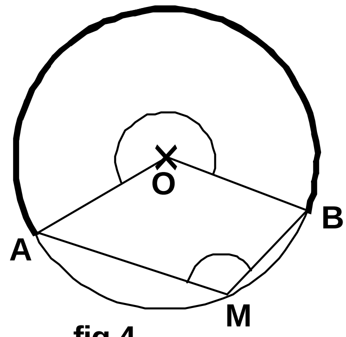


fig.4

II) Démontrons une propriété :

Soient a, b et c les mesures respectives en degrés de $\widehat{OAB}$, $\widehat{MAO}$ et $\widehat{OBM}$.

1) Exprimer en fonction de a, b ou c les mesures des angles $\widehat{AMO}$, $\widehat{OMB}$ et $\widehat{OBA}$ en expliquant pourquoi, puis inscrire le résultat sur le dessin.

2) <u>Compléter :</u> La somme des angles d'un triangle donne ……°

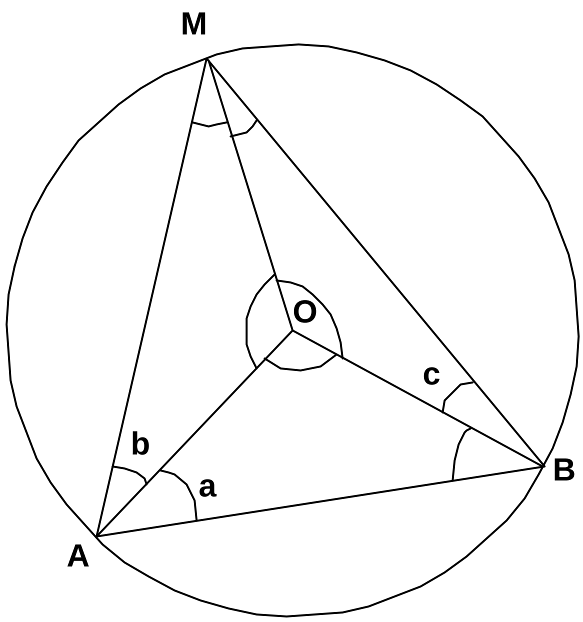
donc $\widehat{AOB}$ = ……° - ($\widehat{OAB}$ + ……) ;

donc $\widehat{AOB}$ = 180° - 2….

3) <u>Compléter :</u> Dans le triangle MAB,

$\widehat{AMB}$ + $\widehat{MBA}$ + $\widehat{BAM}$ = ……°, donc (b + c) + (… + …) + (… + …) = 180° ; donc 2a + 2… + 2… = 180° ;

donc $\boxed{\textbf{2a = 180° - 2… – 2….}}$



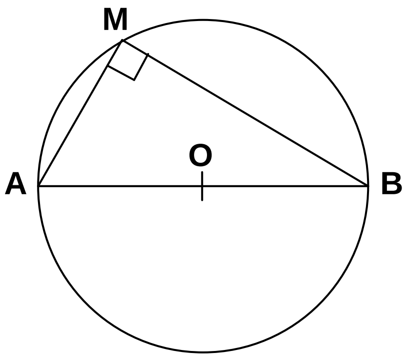
Et puisque, d'après 2), $\widehat{AOB}$= 180° - 2a,

$\boxed{\widehat{AOB}}$ = 180° - (180° - …… – ……) = 180° - 180° + …… + …… = $\boxed{\text{…… + ……}}$.

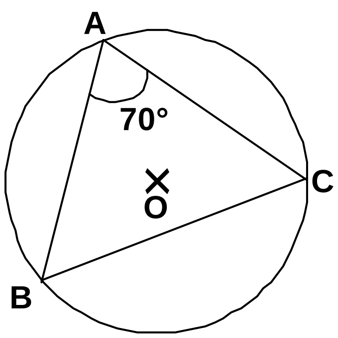
Or $\boxed{\widehat{AMB} = \ldots + \ldots}$, donc $\boxed{\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{\ldots\ldots}}$.

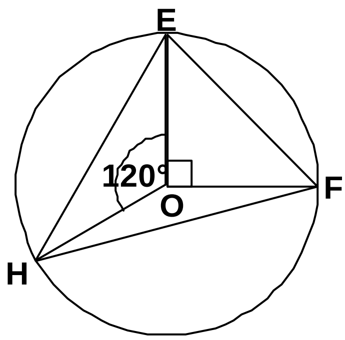
<u>PROPRIÉTÉ :</u> L'angle au centre est toujours le double de l'angle inscrit auquel il est associé.

<u>Question</u> : Pouvez vous retrouver grâce àcela la propriété :
"Lorsqu'on relie un point d'un cercle aux extrémités d'un de ses diamètres, on obtient toujours un triangle rectangle." ?

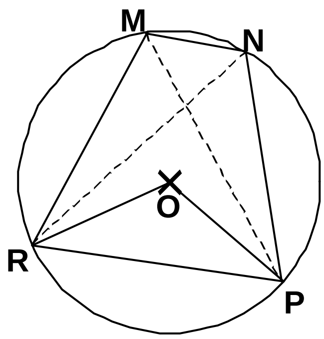


III) Exercices :





1) Calculer $\widehat{BOC}$.   **2)** Calculer les angles $\widehat{HEF}$, $\widehat{EFH}$ et $\widehat{EHF}$.

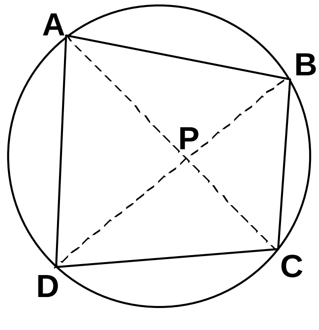


3) **a)** Exprimer $\widehat{RMP}$ en fonction de $\widehat{ROP}$.

b) Exprimer $\widehat{RNP}$ en fonction de $\widehat{ROP}$.

c) Que peut-on dire des angles $\widehat{RMP}$ et $\widehat{RNP}$?

d) En utilisant les termes du cours, expliquer dans quel cas deux angles inscrits dans le même cercle sont égaux…



4) On donne $\widehat{ACD}$ = 47°, $\widehat{CAB}$ = 28° et $\widehat{BDA}$ = 62°. En déduire les mesures des angles $\widehat{ABD}$, $\widehat{BDC}$ et $\widehat{ACB}$. Puis calculer ou déduire les mesures des angles $\widehat{DPC}$, $\widehat{CPB}$, $\widehat{BPA}$, $\widehat{APD}$, $\widehat{DAP}$ et $\widehat{DBC}$ (les dimensions du dessin ne sont pas respectées…).

Correction :

II) Le triangle AOB est isocèle en O car OA et OB sont des rayons du cercle. Comme dans un triangle isocèle, les angles de la base opposée au sommet principal sont égaux, $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = a$. De même, on pourrait démontrer que $\widehat{OMB} = c$ et $\widehat{AMO} = b$.

Question : Lorsque [AB] est un diamètre, l'angle au centre $\widehat{AOB} = 180°$, donc l'angle inscrit $\widehat{AMB} = 180° \div 2 = 90°$. Donc AMB est rectangle en M.

III) **1)** $\widehat{BOC} = 140°$. **2)** L'angle inscrit $\widehat{EFH}$ a pour angle au centre $\widehat{EOH}$. Donc $\widehat{EFH} = 120° \div 2 = 60°$. D'autre part, l'angle inscrit $\widehat{EHF}$ a pour angle au centre $\widehat{EOF}$.

Donc $\widehat{EHF} = 90° \div 2 = 45°$. Dans le triangle EHF, $\widehat{HEF} = 180° - 60° - 45° = 75°$.

3) $\widehat{RMP} = \widehat{ROP} \div 2 = \widehat{RNP}$. Deux angles sont égaux ***"lorsqu'ils interceptent le même arc"*** (ici $\overset{\frown}{RP}$).

4) $\widehat{ABD} = 47°$; $\widehat{BDC} = 28°$; $\widehat{ACB} = 62°$; $\widehat{DPC} = 105°$; $\widehat{CPB} = 75°$; $\widehat{BPA} = 105°$; $\widehat{APD} = 75°$; $\widehat{DAP} = 43°$ et $\widehat{DBC} = 43°$.