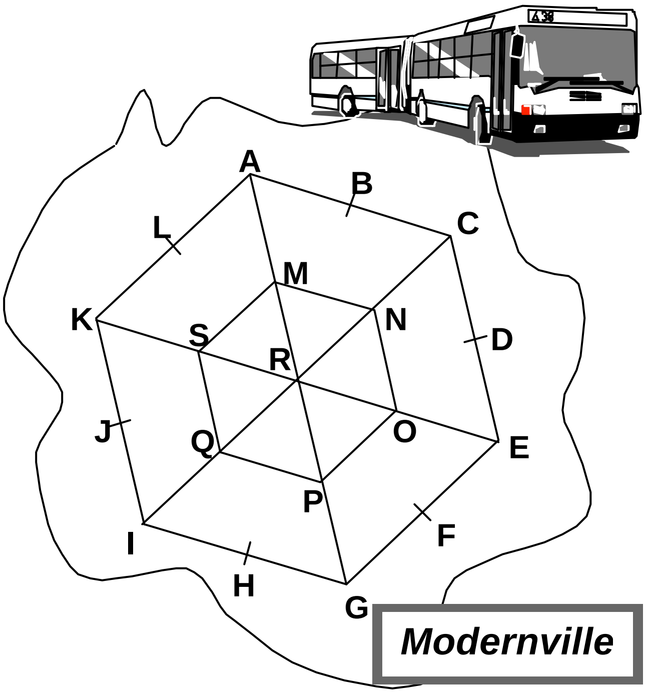
Les vecteurs



A Modernville, on vient de mettre en place un réseau de bus ultramoderne. Ce sont des bus sans chauffeur, et pour cela, ils ont été programmés pour effectuer un trajet bien précis.

Ils ne peuvent aller que ***dans une direction*** (on dit que deux bus vont dans la même direction lorsqu'ils se déplacent suivant des trajectoires parallèles), ***dans un sens*** (ils ne peuvent pas faire marche arrière), et s'arrêtent dès qu'ils ont parcouru ***une distance*** définie à l'avance.

Par exemple, le bus prévu pour aller de A àB ne peut être utilisé pour aller de B àA car c'est la même direction, le même distance, mais pas le même sens. Le bus prévu pour aller de A àL ne pourrait servir pour aller de A àK car c'est la même direction, le même sens, mais pas la même distance. Par contre, le bus prévu pour aller de O àN pourrait servir pour aller de Q àS (Même direction, même sens, même distance).

Pour simplifier la rédaction, on notera $\boxed{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}$ le bus prévu pour aller de A àB.

Lorsque deux bus sont susceptibles d'effectuer le même trajet, (ce qui signifie que l'un pourrait être remplacé par l'autre en cas de panne, par exemple $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OE}$), on dira qu'ils sont égaux et on écrira $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OE}$.De tels bus préprogrammés s'appellent des ***vecteurs*****.**

I) Compléter :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{O\ldots} = \overrightarrow{\ldots O} = \overrightarrow{K\ldots} = \overrightarrow{\ldots R} = \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{Q\ldots} = \overrightarrow{\ldots G} = \overrightarrow{\ldots\ldots}\ ;$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots}\ ;$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots}\ ;$$

Un voyageur veut aller de **A à N**. Il peut utiliser $\overrightarrow{AB}$ ***puis*** $\overrightarrow{BC}$ ***puis*** $\overrightarrow{CN}$, ou utiliser $\overrightarrow{AM}$ ***puis*** $\overrightarrow{MN}$, ou tout autre chemin plus ou moins détourné. Sur son ticket de transport, il y aura tout simplement écrit $\overrightarrow{AN}$. Ce qui signifie que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$ ***puis*** $\overrightarrow{BC}$ ***puis*** $\overrightarrow{CN}$, ou que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ ***puis*** $\overrightarrow{MN}$. On écrira tout simplement:

$$\boxed{\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \text{ ou } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}}$$

II) Compléter :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{L\ldots}\ ; \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{\ldots\ldots}\ ;$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{\ldots\ldots}\ ; \qquad \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{G\ldots}\ ;$$

III) Panne de bus !

Suzie se trouve actuellement au point S. Elle veut se rendre au point M. Normalement, elle devrait prendre le bus (***vecteur***) $\overrightarrow{\ldots\ldots}$.

Mais voilà: son bus est en panne ! Heureusement, il a été remplacé par le bus $\overrightarrow{FE}$. Et c'est possible, car même si le bus $\overrightarrow{FE}$ n'est pas « normalement » prévu pour partir du point S, il est programmé pour aller dans la même direction, dans le même sens, et parcourir la même distance que le bus $\overrightarrow{SM}$. Donc, en partant de S, il emmènera Suzie au point M.

Si Suzie prend le bus de remplacement :	**en partant de :**	**elle arrivera au point :**
$\overrightarrow{SR}$	M	
$\overrightarrow{KA}$	I	
$\overrightarrow{E\ldots}$	C	N
$\overrightarrow{AR}$		I
$\overrightarrow{AQ}$		F
$\overrightarrow{IQ}$ suivi de $\overrightarrow{SR}$	L	
$\overrightarrow{KC}$		E
$\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DA}$	P	

IV) Durant un trajet d'un point à un autre, on peut donc être amené à prendre un bus (vecteur) de « remplacement ». Sachant cela, compléter :

$$\overrightarrow{I\ldots} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{PO}\ ; \qquad \overrightarrow{I\ldots} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{KR}\ ; \qquad \overrightarrow{L\ldots} = \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{SQ}$$

$$\overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\ ; \qquad \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{\ldots\ldots}\ ; \qquad \overrightarrow{K\ldots} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{BC}.$$

V) Translation…

En langage mathématique, un déplacement en ligne droite àbord d'un vecteur s'appelle une $\boxed{\textit{translation}}$. Si on part de M et que l'on fait une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on se retrouve en N.

On dira que **N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$**, et on écrira

$$\boxed{N = t_{\overrightarrow{AB}}(M)}$$

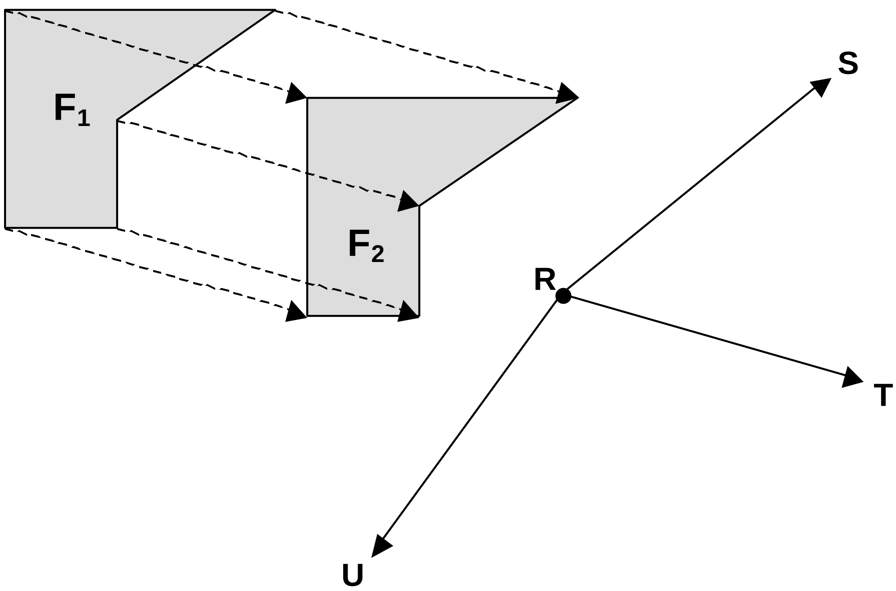
Compléter:

$$E = t_{\overrightarrow{MR}}(\ldots)\ ; \qquad \ldots = t_{\overrightarrow{GF}}(Q)\ ; \qquad A = t_{\overrightarrow{\ldots\ldots}}(L)\ ;$$

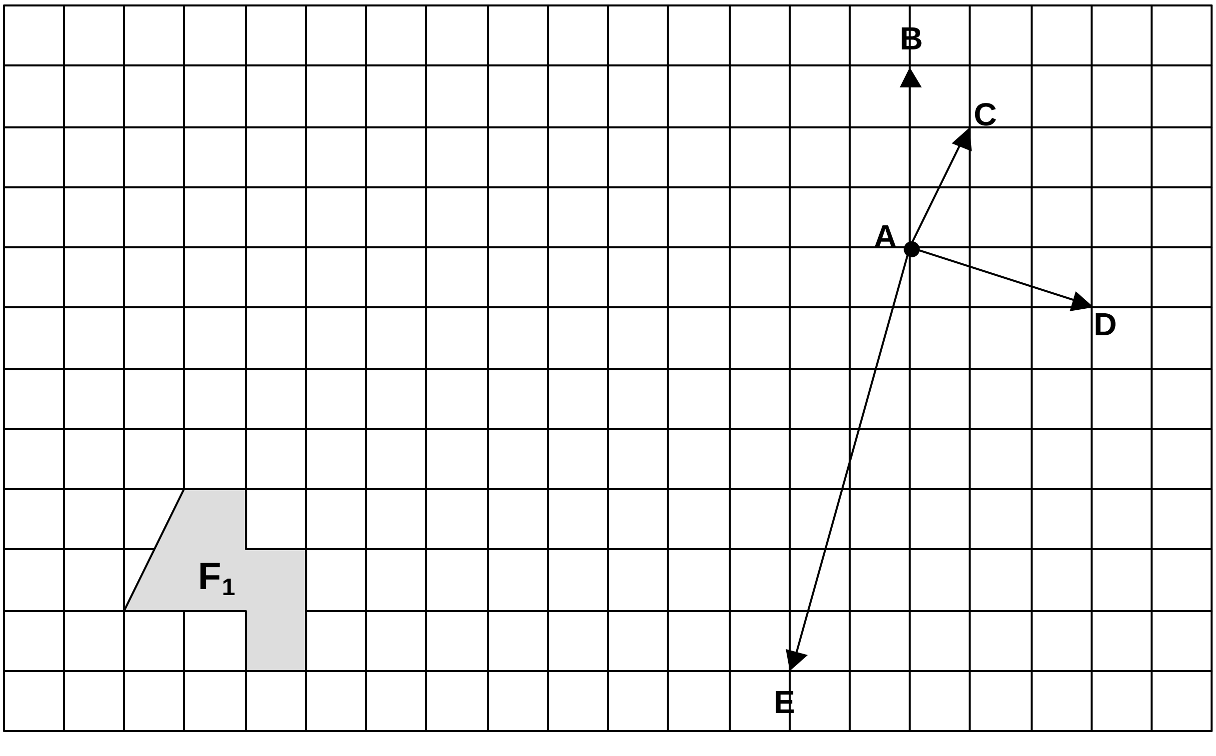
$$\ldots = t_{\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{SR}}(L)\ ; \qquad A = t_{\overrightarrow{BB}}(\ldots\ldots).$$

Déplacement d'une figure par une translation :

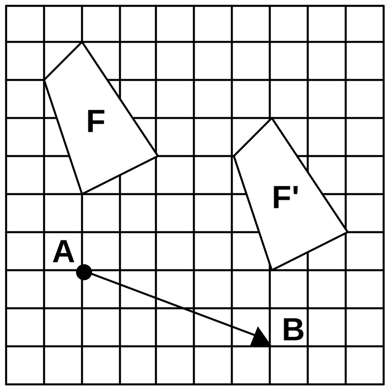
Dire que F_2 est l'**image** de F_1 par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{RT}$ signifie que tous les points de F_1 ont été déplacés en ligne droite en suivant le vecteur $\overrightarrow{RT}$ pour aboutir à F_2.
Tracer ci-dessous F_3, l'image de F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$ et $F_4 = t_{\overrightarrow{RS}}(F_2)$



VI) Dans le quadrillage ci-dessous et sans utiliser d'instruments de géométrie, trace F_2, l'image de F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, puis F_3 l'image de F_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. Trace ensuite $F_4 = t_{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}(F_3)$, et $F_5 = t_{\overrightarrow{DA}}(F_4)$
Enfin, trace F_6 l'image de F_5 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.



Vecteurs et coordonnées



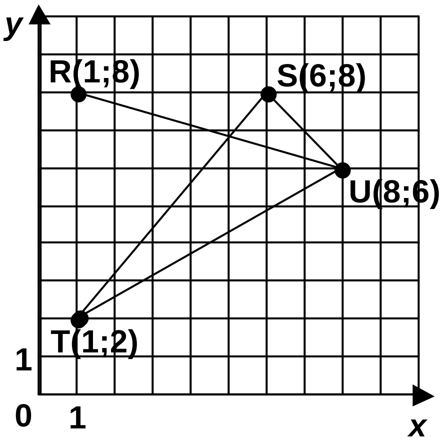
I) Coordonnées d'un vecteur :

F' est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Pratiquement, pour tracer F', il a suffit de déplacer tous les points de F de ….. carreaux horizontalement et de **-2** carreaux ……………………

On dira que **les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont 5 et -2**, et on écrira

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\ (5\ ;\ -2)\ \text{ou}\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}}$$

Sur ce principe, compléter :



$\overrightarrow{RS}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{SU}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{UT}$(….. ; …..) ;
$\overrightarrow{TR}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{SR}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{US}$(….. ; …..) ;
$\overrightarrow{TU}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{RT}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{RU}$(….. ; …..) ;
$\overrightarrow{UR}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{TS}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{ST}$(….. ; …..) ;

Supposons que dans un repère quelconque, on place :

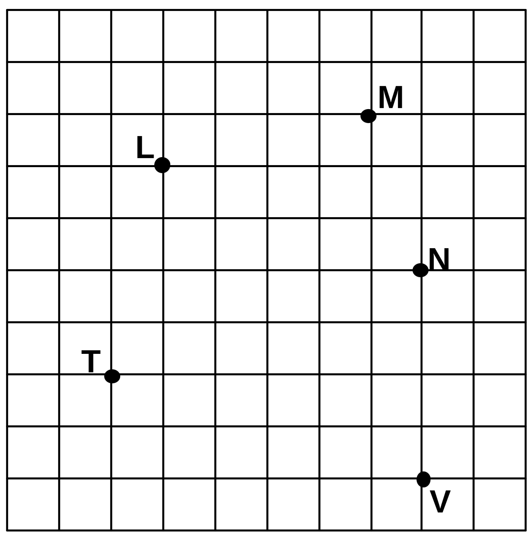
A (-214 ; 123) ; B (137 ; 272) ; C (10 ; 75) et D (-341 ; -74).
En vous inspirant des résultats de l'exercice précédent, compléter :

$\overrightarrow{AB}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{BC}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{AD}$(….. ; …..) ; $\overrightarrow{DC}$(….. ; …..).

D'une manière générale, soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B), alors :

$\overrightarrow{AB}$(……… - ……… ; ……… - ………)

II) **1)** Sur le quadrillage ci-contre, placer un point O tel que $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{ON}$.



Le quadrilatère LMNO est un ………………………….

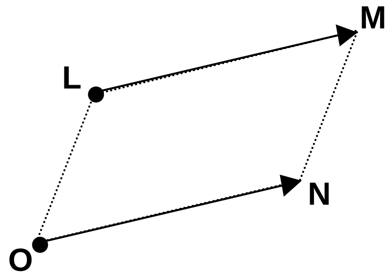
Calculez maintenant les coordonnées de $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

$\overrightarrow{LM}$ (…… ; ……) et $\overrightarrow{ON}$ (…… ; ……) .

2) Sur le quadrillage, placer maintenant un point U tel que $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{UV}$. Que peut-on dire du point U ?

$\overrightarrow{TU}$ (…… ; ……) et $\overrightarrow{UV}$ (…… ; ……).

III) Vecteurs et parallélogrammes :



Dans l'exercice, précédent, vous avez notamment trouvé que $\overrightarrow{LM}$ (…… ; ……) et $\overrightarrow{ON}$ (…… ; ……). Puisque ces vecteurs ont les mêmes coordonnées, ils permettent de faire le même déplacement, donc ils sont égaux. Par définition même des vecteurs, cela signifie que la ***direction*** de $\overrightarrow{LM}$ est la même que celle de $\overrightarrow{ON}$, donc que (LM) parallèle à(…….) , et la ***distance*** parcourue par $\overrightarrow{LM}$ est la même que la distance parcourue par …… donc LM = ON.

Le quadrilatère LMNO a ***une paire*** de côtés opposés ***à la fois*** parallèles et de même longueur, donc c'est un …………………………… .

Pour prouver qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme, il suffit de montrer par le calcul que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (Et surtout pas que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$!!!)
ou que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$, ou que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$, ou que $\overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$

Exemple et rédaction: Dans un repère, soit F(-1;14), A(4;10) , C(1;-4) et D(-4 ;0). Prouver que FACD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{FA}$($x_A - x_F$; $y_A - y_F$) donc $\overrightarrow{FA}$ (4 - (-1) ; 10 - 14) donc $\overrightarrow{FA}$ (….. ; …..).

$\overrightarrow{DC}$(… - … ; … - …) donc $\overrightarrow{DC}$ (……….. ;……….) donc $\overrightarrow{DC}$ (…… ; ……)

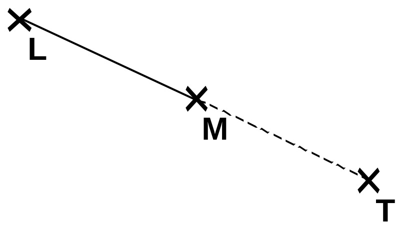
Puisque $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$, …………. est un parallélogramme ***car il a une paire de côtés opposés à la fois parallèles et de même longueur.***

IV) Vecteurs et milieux :

Au II), vous avez constaté que si on a trois points T, U et V tels que $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{UV}$, alors :

U est ……………………………………………………………………….

Par exemple, soient L(-5 ; 7) et M(3 ; -8) dans un repère quelconque. On cherche dans ce repère les coordonnées du point T(x_T ; y_T) tel que T soit le symétrique de L par rapport àM.



Dire que T est le symétrique de L par rapport àM revient à dire que M est le …………….de [TL], donc que $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$

$\overrightarrow{LM}$ ($x_M - x_L$; $y_M - y_L$) donc $\overrightarrow{LM}$ (…… ; ……).

D'autre part, $\overrightarrow{MT}$ (…… - 3 ; …… - (-8)).

$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{MT}$ donc ils ont les mêmes coordonnées.

Donc : $\begin{cases} \ldots\ldots = \ldots\ldots - 3 \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots + 8 \end{cases}$ et $\begin{cases} \ldots\ldots = x_T \\ \ldots\ldots = y_T \end{cases}$. Donc T(…… ; ……).

V) Addition de deux vecteurs :

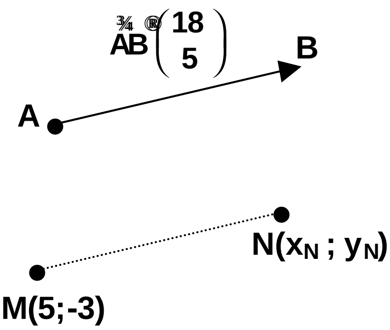
Reprenons l'exemple des points R,S,T et U du ***I).***

D'après le dessin, $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} = \overrightarrow{RU}$. Or $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SU}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU}\begin{pmatrix}5+2\\0+(-2)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et on retrouve $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$.

Pour additionner deux vecteurs, il suffit tout simplement d'additionner leurs coordonnées horizontales et leurs coordonnées verticales !

VI) Image d'un point par une translation :



On cherche N (x_N ; y_N) tel que N est l'image de M(5;-3) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (18 ; 5).

Dire que N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ revient à dire que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$.

Or $\overrightarrow{MN}$ ($x_N - x_M$; ….. - ……) ; donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N - 5\\y_N - (-3)\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}18\\5\end{pmatrix} = \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N - 5\\y_N + 3\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}18 = x_N - 5\\5 = y_N + 3\end{cases}$ donc $\begin{cases}\ldots\ldots = x_N\\\ldots\ldots = y_N\end{cases}$ ***donc N(23 ; 2)***

Exercices :

1) Soit A(-9 ; 6) , B (6;10) ; M (4;-4) et N (-11; -8). Déterminer par le calcul $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{NM}$. Les résultats obtenus permettent de prouver l'existence d'un parallélogramme. Comment s'appelle-t-il?

2) Déterminer par le calcul les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$. Déduisez-en, toujours par le calcul, les coordonnées de P, image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$.

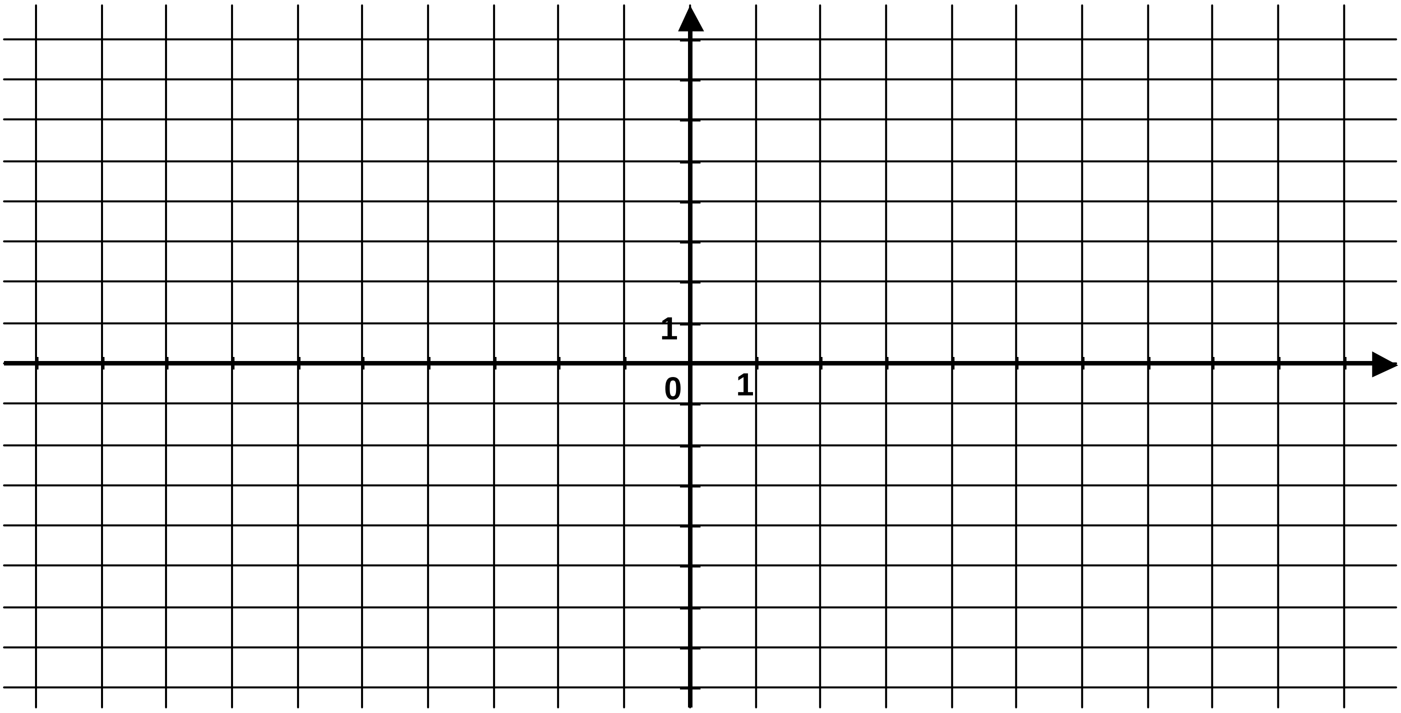
3) Calculer $\overrightarrow{MP}$ puis $\overrightarrow{BM}$. Que peut-on en déduire pour le point M ?

4) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\ldots\ldots}$. Déterminer $\overrightarrow{AP}$ **<u>sans utiliser les coordonnées de A et P</u>**.

<u>Correction:</u> 1) $\overrightarrow{AB}$(15;4) ; $\overrightarrow{NM}$ (15;4) ; ABMN est un parallélogramme car il a une paire de côtés opposés à la fois parallèles et de même longueur. 2) $\overrightarrow{AM}$(13 ; -10) ; P (2;-18) ;
3) $\overrightarrow{MP}$(-2;-14) ; $\overrightarrow{BM}$(-2;-14) donc M est le milieu de [BP]. 4) $\overrightarrow{AP}$(11;-24)

Les vecteurs : récapitulatif

Dans le repère ci-dessous, placer A(-4 ; 3) , M(6 ; 2) et P(2 ; -1).



I) **1)** Placer I = $t_{\overrightarrow{MP}}$ (P), G = $t_{\overrightarrow{AM}}$ (I). Donner un vecteur égal à $\overrightarrow{AM}$. Que peut-on dire du quadrilatère AMGI ? Justifier.

2) Placer Z tel que $\overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{IP}$ et R tel que $\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{MA}$**.**

II) **Compléter:**

1) $\overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{PZ}$; **2)** $\overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AP}$;

3) $\overrightarrow{P\ldots} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{IM}$ **; 4)** $\overrightarrow{R\ldots} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{IA}$;

III) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{ZP}$ et $\overrightarrow{RP}$. Ces résultats permettent de prouver l'existence de deux parallélogrammes. Lesquels ?

IV) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1) $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{IG}$; **2)** $\overrightarrow{ZP} + \overrightarrow{MA}$; **3)** $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PZ}$;

V) Soit K (x_K ; y_K) un point tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MK}$. Déterminer **<u>par le calcul</u>** les coordonnées de K. Que peut-on dire du point M ?

VI) Soit D (x_D ; y_D) un point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DZ}$. Quelle conclusion géométrique peut-on tirer de cette égalité ? Déterminer **<u>par le calcul</u>** les coordonnées de D.

<u>Correction :</u> ***I) 1)*** I(-2;-4) ; G(8;-5) ; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IG}$; AMGI est un parallélogramme car il a une paire de côtés opposés à la fois parallèles et de même longueur. ***2)*** Z(0;6) ; R(-8;0).

II) 1) $\overrightarrow{GZ}$ ***2)*** $\overrightarrow{MG}$ ***3)*** $\overrightarrow{PM}$ ***4)*** $\overrightarrow{RM}$ **III)** $\overrightarrow{AM}$(10;-1) ; $\overrightarrow{AI}$(2;-7) ; $\overrightarrow{ZP}$(2;-7) ; $\overrightarrow{RP}$(10;-1).
AMPR et AZPI sont des parallélogrammes. ***IV) 1)*** (14;2) ; 2) (-8;-6) ; 3) (0;0).
V) K(14;8) . M est le milieu de [IK]. ***VI)*** AMZD est un parallélogramme. D(-10;7).